CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1983

MATHEMATIQUES I (4 h)

Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et de la qualité de la présentation.

On admettra, dans tout le problème que l'intégrale : $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

PREMIERE PARTIE

f et g désignent des fonctions inconnues de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{R}$, satisfaisant au système différentiel :

$$(1)\quad \begin{cases} f'(x) = -\dfrac{x}{2(1+x^2)} f(x) - \dfrac{1}{2(1+x^2)} g(x) \\ g'(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)} f(x) - \dfrac{x}{2(1+x^2)} g(x) \end{cases}$$

1) On effectue le changement de variables défini par $x = \mathrm{sh}\alpha$. On pose :

$$\hat{f}(\alpha) = f(\mathrm{sh}\alpha) \quad \text{et} \quad \hat{g}(\alpha) = g(\mathrm{sh}\alpha)\ .$$

Montrer que le système différentiel (1) équivaut au système différentiel (2) :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2}{d\alpha^2}[\mathrm{ch}\alpha\, \hat{f}(\alpha)] - \dfrac{1}{4}[\mathrm{ch}\alpha\, \hat{f}(\alpha)] = 0 \\ \hat{g}(\alpha) = -[2\mathrm{ch}\alpha \dfrac{d\hat{f}}{d\alpha}(\alpha)] - [\mathrm{sh}\alpha\, \hat{f}(\alpha)] \end{cases}$$

2) Intégrer le système (2). On mettra $\hat{f}(\alpha)$ et $\hat{g}(\alpha)$ sous forme de combinaison linéaire de deux fonctions, l'une paire, l'autre impaire, de α.

3) Expliciter les fonctions $f(x)$ et $g(x)$, sans faire usage de fonctions exponentielles, logarithmes ni hyperboliques. On écrira $f(x)$ et $g(x)$ comme combinaison linéaire de deux fonctions, l'une paire, l'autre impaire, de x.

4) a désigne une fonction définie et continue sur $\mathbf{R}$ de la variable x, à valeurs dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire que $a(x) = a_1(x) + ia_2(x)$, a_1 et a_2 étant à valeurs réelles définies et continues sur $\mathbf{R}$. On pose :

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \int_0^x a_1(t)\,dt + i\int_0^x a_2(t)\,dt\ .$$

a) Quelle est la dérivée de $e^{A(x)}$?

b) Montrer que la solution générale de l'équation différentielle :

$$(*) \qquad z'(x) = a(x)\, z(x)$$

où z est une fonction inconnue, à valeurs complexes, de la variable réelle x, s'écrit :

$$z(x) = \lambda e^{A(x)}\ ,\ \lambda \text{ désignant un complexe arbitraire.}$$

5) En posant $z(x) = f(x) + ig(x)$. montrer que le système (1) devient une équation différentielle du type (*).

Intégrer cette équation et retrouver le résultat du (I,3).

.../...

DEUXIEME PARTIE

On considère les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \sin(xu^2)\, du \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cos(xu^2)\, du$$

1) Montrer que φ et Ψ sont définies sur $\mathbb{R}$. Quelle est leur parité ?

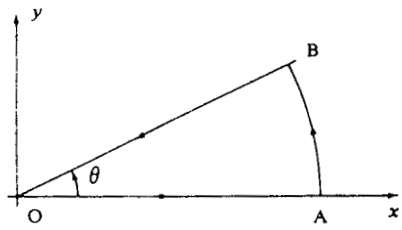
2) On considère les formes différentielles :

$$\omega_1 = h(y^2 - x^2)\ [\cos(2xy)\, dx + \sin(2xy)\, dy]$$

$$\omega_2 = h(y^2 - x^2)\ [\sin(2xy)\, dx - \cos(2xy)\, dy]$$

où h est une fonction numérique d'*une* variable réelle, supposée continûment dérivable, et telle que $h(0) = 1$.
Déterminer h pour que ω_1 et ω_2 soient exactes.

3) On considère dans le plan affine enclidien rapporté à un repère orthonormé le chemin fermé $(\widehat{OA}) \cup (\widehat{AB}) \cup (\widehat{BO}) = (\Gamma_+)$ représenté ci-contre, supposé parcouru dans le sens direct. $\widehat{AB}$ est un arc de cercle de centre O , de rayon R ; l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.



On prend dans cette question $h(u) = e^u$. Quelle est la valeur des intégrales curvilignes :

$$\int_{(\Gamma_+)} \omega_1 \quad \text{et} \quad \int_{(\Gamma_+)} \omega_2 \ ?$$

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\widehat{OA}} \omega_1 \ ; \ \lim_{R\to\infty} \int_{\widehat{OA}} \omega_2 \ ; \ \lim_{R\to\infty} \int_{\widehat{AB}} \omega_1 \ ; \ \lim_{R\to\infty} \int_{\widehat{AB}} \omega_2$$

4) On pose $a = \operatorname{tg}\theta$. Montrer que :

$$(3) \qquad \int_0^{\infty} e^{(a^2-1)x^2} [\cos(2ax^2) + a \sin(2ax^2)]\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(4) \qquad \int_0^{\infty} e^{(a^2-1)x^2} [\sin(2ax^2) - a \cos(2ax^2)]\, dx = 0$$

5) En déduire les intégrales :

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} \cos\left(\frac{2au^2}{1-a^2}\right) du \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} e^{-u^2} \sin\left(\frac{2a}{1-a^2}\, u^2\right) du$$

6) Montrer que :

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2(1+x^2)}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2(1+x^2)}}$$

TROISIEME PARTIE

1) Montrer la convergence de l'intégrale $I_n = \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2n}\, du$.

Donner une formule de récurrence liant I_n à I_{n+1} (on pourra procéder à une intégration par parties). En déduire la valeur de I_n .

2) Montrer l'inégalité, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et pour N entier supérieur à 1 :

$$(5) \qquad \left| \sin t - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)\ !} \right| \leqslant \frac{|t|^{2N+1}}{(2N+1)\ !}$$

.../...

3) On pose :

$$a_n = (-1)^n \frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$u_n(x) = a_n x^{2n+1} \quad ?$$

4) Montrer que, pour $|x| < 1$, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \left| \varphi(x) - \sum_{n=0}^{N-1} u_n(x) \right| = 0 \qquad (6)$$

En déduire le développement en série entière de $\varphi(x)$.

5) Calculer de même le développement en série entière de $\Psi(x)$, et préciser le domaine de validité de ce développement.

QUATRIEME PARTIE

On considère, pour $X > 0$, les intégrales

$$I(X) = \int_0^\infty e^{-Xt^2} \sin(t^2)\, dt$$

et

$$J(X) = \int_0^\infty e^{-Xt^2} \cos(t^2)\, dt .$$

On pose, de plus :

$$I = \int_0^\infty \sin(t^2)\, dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^\infty \cos(t^2)\, dt .$$

1) Justifier la convergence de ces intégrales.

2) Expliciter $I(X)$ et $J(X)$. On utilisera le résultat de la « Deuxième partie ».

3) Montrer que :

$$I(X) - I = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2} - 1}{u} \cdot \left(u \sin \frac{u^2}{X}\right) \frac{du}{\sqrt{X}} .$$

En procédant à une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{X\to 0} [I(X) - I] = 0 .$$

4) En déduire la valeur de :

$$I = \int_0^\infty \sin x^2\, dx .$$

5) Calculer de même la valeur de

$$J = \int_0^\infty \cos x^2\, dx .$$

FIN